Inhaltsverzeichnis: Band 1

5.6 Additionsverfahren

Prinzip: Die beiden Gleichungen werden so umgeformt, dass bei der **Addition** der beiden Gleichungen eine Variable wegfällt.
→ Es müssen nach der Umformung also in beiden Gleichungen *gleich viele x oder gleich viele y (aber mit entgegengesetzten Vorzeichen)* vorhanden sein.

Beispiele ($G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$)

a) (1) $3x + y = 18$
(2) $2x - 3y = 1$

Es spielt für das Lösen und das Ergebnis keine Rolle, welche Variable zuerst wegfällt, wie aus der folgenden Musterlösung ersichtlich ist.

Variante 1: x soll zuerst wegfallen

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen**

Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**

hier: Gleichung (1) mit 2
Gleichung (2) mit (−3)

(1) $3x + y = 18 \quad | \cdot 2$
(1)' $6x + 2y = 36$

(2) $2x - 3y = 1 \quad | \cdot (-3)$
(2)' $-6x + 9y = -3$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**

Die beiden Gleichungen **addieren**:

(1)' $6x + 2y = 36$
(2)' $\underline{-6x + 9y = -3}$
$2y + 9y = 36 - 3$

❹ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$11y = 33 \quad | : 11$
$\underline{y = 3}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
hier: y in Gleichung (1)

$3x + y = 18$ und $y = 3$

$3x + 3 = 18 \quad | - 3$
$3x = 15 \quad | : 3$
$\underline{x = 5}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{(5 \mid 3)\}$

Variante 2: y soll zuerst wegfallen

❶ **Definitionsmenge**

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen**

Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**

hier: Gleichung (1) mit 3
Gleichung (2) muss nicht multipliziert werden

(1) $3x + y = 18 \quad | \cdot 3$
(1)' $9x + 3y = 54$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**

Die beiden Gleichungen **addieren**:

(1)' $9x + 3y = 54$
(2) $\underline{2x - 3y = 1}$
$9x + 2x = 54 + 1$

❹ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$11x = 55 \quad | : 11$
$\underline{x = 5}$

❺ **2. Variable ausrechnen**

Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
hier: x in Gleichung (1)

$3x + y = 18$ und $x = 5$

$3 \cdot 5 + y = 18$
$15 + y = 18 \quad | - 15$
$\underline{y = 3}$

❻ **Lösungsmenge**

$L = \{(5 \mid 3)\}$

c) (1) $4x + 3y = 7$
(2) $7x + 6y = 10$

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❶ **Definitionsmenge**
$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen / geeignet multiplizieren**
(1) $4x + 3y = 7$ | $\bullet (-2)$ ➔ (1)' $-8x - 6y = -14$
(2) $7x + 6y = 10$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**
(1)' $-8x - 6y = -14$
(2) $\underline{7x + 6y = 10}$
$-x = -4$ | $\bullet (-1)$

❹ **Übrig gebliebene 1. Variable ausrechnen**
$\underline{x = 4}$

❺ **2. Variable ausrechnen** (hier: x in Gleichung (1) einsetzen)
$4 \bullet 4 + 3y = 7$ | $- 16$
$3y = -9$ | $: 3$
$\underline{y = -3}$

❻ **Lösungsmenge**
$L = \{(4 \mid -3)\}$

$L = \{(4 \mid -3)\}$

d) (1) $5x - 8y = -6$
(2) $2x + 6y = -7$

$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❶ **Definitionsmenge**
$D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

❷ **Gleichung(en) umformen / geeignet multiplizieren**
(1) $5x - 8y = -6$ | $\bullet 2$ ➔ (1)' $10x - 16y = -12$
(2) $2x + 6y = -7$ | $\bullet (-5)$ ➔ (2)' $-10x - 30y = 35$

❸ **Eliminieren einer der Variablen**
(1)' $10x - 16y = -12$
(2)' $\underline{-10x - 30y = 35}$
$-46y = 23$ | $: (-46)$

❹ **Übrig gebliebene 1. Variable ausrechnen**
$\underline{y = -½}$

❺ **2. Variable ausrechnen** (hier: y in Gleichung (2) einsetzen)
$2x + 6 \bullet (-½) = -7$
$2x - 3 = -7$ | $+ 3$
$2x = -4$ | $: 2$
$\underline{x = -2}$

❻ **Lösungsmenge**
$L = \{(-2 \mid -½)\}$

$$L = \left\{\left(-2 \mid -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

6.4.3 pq-Formel

Neben den beiden mathematischen Methoden der Faktorzerlegung und der quadratischen Ergänzung gibt es auch Lösungsmethoden, die auf Formeln basieren: die pq- und die abc-Formel der quadratischen Gleichungen.

Haben wir eine quadratische Gleichung, bei der vor dem x^2 der Faktor 1 steht, lässt sich die pq-Formel anwenden.

Normalform: $x^2 + px + q = 0$

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Die mathematische Herleitung der pq-Formel können Sie im Kapitel 6.4.4 nachvollziehen.

Allgemeines Lösungsvorgehen:

❶ Definitionsmenge bestimmen

❷ Gleichung in die pq-Normalform bringen (wenn nötig), und die Werte für p und q bestimmen
! Achtung: Die Vorzeichen von p und q auch übernehmen.

❸ Werte für p und q in der Formel einsetzen *(inkl. Vorzeichen !)*

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen

❺ Lösungsmenge bestimmen

Beispiele (G = ℝ)

a) $x^2 + 4x - 221 = 0$

❶ D = ℝ

❷ Wir bestimmen zuerst p und q.
(falls der Faktor vor $x^2 \neq 1$ ist, muss die Gleichung noch durch diesen dividiert werden)

$$x^2 \underbrace{+\ 4}_{p}x \underbrace{-\ 221}_{q} = 0$$

Die **Vorzeichen** gehören zu p und q dazu !

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen: **p = 4**, **q = −221**

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-221)}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 221}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{225}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 15$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 - 15 \quad \Rightarrow x_1 = \underline{-17}$$

$$\Rightarrow x_2 = -2 + 15 \quad \Rightarrow x_2 = \underline{13}$$

❺ L = { −17 ; 13 }

b) $2x^2 - 6x = -2$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ Gleichung in die pq-Normalform bringen:

$2x^2 - 6x = -2$ | + 2

$2x^2 - 6x + 2 = 0$ | : 2 (d.h. durch den Faktor vor x^2 dividieren)

$x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x^2 \underbrace{-\ 3}_{p}x \underbrace{+\ 1}_{q} = 0$$

❸ Die Werte für p und q in der Formel einsetzen: **$p = -3$**, **$q = 1$**

$$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 1}$$

❹ Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 - 1}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{1.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 1.1180...$

$\Rightarrow x_1 = 1.5 - 1.1180...$ $\Rightarrow x_1 = \underline{0.3819...}$

$\Rightarrow x_2 = 1.5 + 1.1180...$ $\Rightarrow x_2 = \underline{2.6180...}$

❺ $L = \{ 0.38 ; 2.62 \}$

c) $x^2 - 3x = 54$

$D = \mathbb{R}$

❶ $D = \mathbb{R}$

❷ $x^2 - 3x = 54$

$x^2 - 3x - 54 = 0$

$$x^2 \underbrace{-\ 3}_{p}x \underbrace{-\ 54}_{q} = 0$$

❸ $$x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - (-54)}$$

❹ $x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{2.25 + 54}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm \sqrt{56.25}$

$x_{1,2} = 1.5 \pm 7.5$

$\Rightarrow x_1 = \underline{-6}$, $x_2 = \underline{9}$

❺ $L = \{ -6 ; 9 \}$

$L = \{ -6 ; 9 \}$

Aufgabe 6.5

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$ mit Hilfe der abc-Formel.

a)	$5x^2 + 10x - 75 = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-5;\ 3\}$
b)	$3x^2 - 2x = 8$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{4}{3};\ 2\right\}$
c)	$5x^2 + x - 48 = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-3.2;\ 3\}$
d)	$2x^2 - 12x - 20 = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-1.36;\ 7.36\}$
e)	$3x^2 = 5x + 2$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{1}{3};\ 2\right\}$
f)	$6x^2 + 10 = 19x$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{\frac{2}{3};\ 2.5\right\}$
g)	$4x^2 - 10x = 14$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-1;\ 3.5\}$
h)	$8x^2 - 3x = 0.5$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}\right\}$
i)	$3x^2 - 25x = -28$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{\frac{4}{3};\ 7\right\}$
j)	$5x^2 + 4x = 17.25$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-2.3;\ 1.5\}$
k)	$(4x-1)(2x+2) = 0$	$D = \mathbb{R}$	$L = \left\{-1;\ \frac{1}{4}\right\}$
l)	$(3x-2)(5x+2) = 5x^2$	$D = \mathbb{R}$	$L = \{-0.46;\ 0.86\}$

b) Die Summe zweier natürlicher Zahlen beträgt 138. Teilt man die grössere durch die kleinere, erhält man 4, und es bleibt ein Rest von 3.
Wie heissen die beiden Zahlen?

❶ Analyse

	grössere Zahl		kleinere Zahl		Resultat
1)	△	+	□	=	138
2)	△	:	□	=	4, Rest 3

Tipp: Subtrahiert man den Rest von der grösseren Zahl, so ergibt die Division keinen Rest mehr, sondern genau 4.

oder	△ **– 3**	:	□	=	4

Lösung mit nur 1 Unbekannten	Lösung mit 2 Unbekannten
❷ ([grössere Zahl] – Rest) : [kleinere Zahl] = **4**	❷ (1) [grössere Zahl] + [kleinere Zahl] = **138** (2) ([grössere Zahl] – Rest) : [kleinere Zahl] = **4**
❸ x = grössere Zahl 138 – x = kleinere Zahl	❸ x = grössere Zahl y = kleinere Zahl
❹ $\frac{x-3}{138-x} = 4$	❹ (1) $x + y = 138$ (2) $\frac{x-3}{y} = 4$
❺ $D = \mathbb{N} \setminus \{138\}$ $\frac{x-3}{138-x} = 4$	• (138 – x) $x - 3 = 4(138 - x)$	ausmultiplizieren $x - 3 = 552 - 4x$	+ 4x $5x - 3 = 552$	+ 3 $5x = 555$	: 5 $\underline{x = 111}$ kleinere Zahl: 138 – x 138 – 111 = $\underline{27}$	❺ $D = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (1) $x + y = 138$ → $x = 138 - y$ (2) $\frac{x-3}{y} = 4$ → $x = 4y + 3$ Gleichsetzungsverfahren $138 - y = 4y + 3$	+ y $138 = 5y + 3$	– 3 $135 = 5y$	: 5 $\underline{y = 27}$ y einsetzen und x berechnen $x = 138 - y$ $x = 138 - 27$ $\underline{x = 111}$

❻ Die Zahlen lauten: **111** und **27**.

❼ Probe: 111 + 27 = 138 ☑
111 : 27 = 4, Rest 3 ☑

c) Zähler und Nenner eines Bruches ergeben zusammen 21. Zählt man zum Zähler und Nenner je die Zahl 7 dazu, erhält der Bruch den Wert $\frac{3}{4}$.

Wie heisst der Bruch?

❶ Analyse

(1) Zähler + Nenner = 21

(2) $\dfrac{\text{Zähler} + 7}{\text{Nenner} + 7} = \dfrac{3}{4}$

❷ (1) [Zähler] + [Nenner] = 21

(2) ([Zähler] + 7) : ([Nenner] + 7) = $\frac{3}{4}$

Lösung mit nur 1 Unbekannten

❸ x = Zähler

21 − x = Nenner

❹ $\dfrac{x+7}{(21-x)+7} = \dfrac{3}{4}$

❺ D = $\mathbb{Q} \setminus \{28\}$

$\dfrac{x+7}{28-x} = \dfrac{3}{4}$ | • 4 (28 − x)

4 (x + 7) = 3 (28 − x)

4x + 28 = 84 − 3x | + 3x

7x + 28 = 84 | − 28

7x = 56 | : 7

x = 8

Nenner: 21 − x

21 − 8 = 13

Lösung mit 2 Unbekannten

❸ x = Zähler

y = Nenner

❹ (1) x + y = 21

(2) $\dfrac{x+7}{y+7} = \dfrac{3}{4}$

❺ D = $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \setminus \{-7\}$

(1) x + y = 21 | − y

x = − y + 21 | • 4

4x = −4y + 84

(2) $\dfrac{x+7}{y+7} = \dfrac{3}{4}$ | • 4 (y + 7)

4 (x + 7) = 3 (y + 7)

4x + 28 = 3y + 21 | − 28

4x = 3y − 7

Gleichsetzungsverfahren

−4y + 84 = 3y − 7 | + 4y

84 = 7y − 7 | + 7

91 = 7y | : 7

y = 13

y in Gleichung (1) einsetzen:

x + y = 21

x + 13 = 21

x = 8

❻ Der Bruch lautet $\frac{8}{13}$.

8.5 Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis

8.5.1 Addition / Subtraktion

a) $a^2 + a^3$ = $a^2 + a^3$ (nicht addierbar)

➔ Potenzen mit unterschiedlichen Exponenten können **nicht** addiert werden. Das leuchtet ein, wenn wir a mit m ersetzen und uns bewusst werden, dass m^2 ein **Flächen-** und m^3 ein **Volumenmass** ist.

b) $a^3 + a^3$ = $2a^3$

c) $2ab^2 - ab^2$ = ab^2

d) $5a^2 + a - (4a^2 - a)$ = $a^2 + 2a$

Fazit: Nur Potenzen **mit gleicher Basis und gleichem Exponent** können addiert/subtrahiert werden.

8.5.2 Multiplikation

a) $a^2 \bullet a^3$ = $a^{(2+3)}$ = a^5

weil $\boxed{a \bullet a} \bullet \boxed{a \bullet a \bullet a}$

b) $2a^2 \bullet 5a^4$ = $2 \bullet 5 \bullet a^{(2+4)}$ = $10a^6$

weil $2 \bullet 5 \bullet \boxed{a \bullet a} \bullet \boxed{a \bullet a \bullet a \bullet a}$

c) $b^7 \bullet b$ $b^{(7+1)}$ = b^8

d) $3a^5 \bullet 4a^3$ $3 \bullet 4 \bullet a^{(5+3)}$ = $12a^8$

Fazit: Potenzen mit gleichen Basen werden multipliziert, indem die Exponenten **addiert** werden.

8.5.3 Division

a) $a^4 : a^3$ = $a^{(4-3)}$ = a

weil $\frac{a \bullet a \bullet a \bullet a}{a \bullet a \bullet a} = \frac{\overset{1}{\cancel{a \bullet a \bullet a}} \bullet a}{\underset{1}{\cancel{a \bullet a \bullet a}}}$

b) $12a^4 : (6a^2)$ = $12 : 6 \bullet a^{(4-2)}$ = $2a^2$

weil $\frac{12 \bullet a \bullet a \bullet a \bullet a}{6 \bullet a \bullet a} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}} \bullet \overset{1}{\cancel{a \bullet a}} \bullet a \bullet a}{\underset{1}{\cancel{6}} \bullet \underset{1}{\cancel{a \bullet a}}}$

c) $a^8 : a$ $a^{(8-1)}$ = a^7

d) $36a^5 : (9a^4)$ $36 : 9 \bullet a^{(5-4)}$ = $4a$

Fazit: Potenzen werden dividiert, indem die Exponenten voneinander **subtrahiert** werden.

Aufgabe 8.8

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a)	$\dfrac{a^4\, b^3}{a} : (a^2\, b^2)$	ab	b)	$\dfrac{a^2\, b^3}{c^2} : \dfrac{a^3\, b^2}{c^3}$	$a^{-1}\, bc$
c)	$\dfrac{a^3\, b^2}{b^4} : \dfrac{a^4\, b}{b^3}$	a^{-1}	d)	$\dfrac{a^3\, b}{b^3} : \dfrac{a^2\, b^2}{a}$	$a^2\, b^{-4}$
e)	$\dfrac{a^{-2}\, b^2}{b^{-3}} : \dfrac{a\, b^4}{a^4}$	ab	f)	$\dfrac{4\, a^4\, b^{-2}}{5\, c^{-2}} : \dfrac{2\, b^{-2}}{5\, a^2\, c^3}$	$2\, a^6\, c^5$
g)	$\dfrac{4\, a^{-2}}{b^2\, c^{-3}} : \dfrac{(2a)^2}{b^{-2}\, (2c)^{-3}}$	$\dfrac{1}{8}\, a^{-4}\, b^{-4}$	h)	$\dfrac{(3a)^3\, b^4}{c^{-2}} : \dfrac{3a^{-1}\, b^3}{c^{-3}}$	$9\, a^4\, b\, c^{-1}$
i)	$\dfrac{-2^2 a^3\, b^4}{b^{-2}} : \dfrac{(-4)^2\, a^{-1}}{b^{-1}}$	$-\dfrac{1}{4}\, a^4\, b^5$			

Aufgabe 8.9

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke, und schreiben Sie das Resultat ohne Parameter im Nenner, sondern allenfalls mit negativem Exponenten.

a)	$\dfrac{a^{n+1}\, b^3}{c^n} : \dfrac{a^n\, b^2}{c^{n+1}}$	abc
b)	$\dfrac{a^{2n-1}}{b^{2n}\, c^{n-1}} : \dfrac{a^{n+1}}{b^n\, c^{n+1}}$	$a^{n-2}\, b^{-n}\, c^2$
c)	$\dfrac{a^{1-n}\, b^{2n}}{a^{3n}} : \dfrac{b^{n+1}}{a^{2n-1}}$	$a^{-2n}\, b^{n-1}$
d)	$\dfrac{a^{2n}}{b^{2n-1}\, c^{1-n}} : \dfrac{a^{n-1}}{b^{2-n}\, c^{n-2}}$	$a^{n+1}\, b^{3-3n}\, c^{2n-3}$
e)	$\dfrac{a^2\, b^{-2}}{a^3} : \dfrac{a^{-4}}{b^3}$	$a^3\, b$
f)	$\dfrac{a^{1-n}\, b^2}{b^{n-1}} : \dfrac{b^{2n}}{a^{2n}}$	$a^{n+1}\, b^{3-3n}$
g)	$\dfrac{9\, a^{2n}\, b^{n+1}}{a^{n-1}} : \dfrac{3\, a^{n-2}\, b^{2n-1}}{b^{n+1}}$	$3\, a^3\, b^3$
h)	$\dfrac{4\, a^{n-1}\, b^{2n+2}}{6\, b^{n-1}} : \dfrac{8\, a^{2n+1}\, b^{n-2}}{9\, a^{n-2}}$	$\dfrac{3}{4}\, a^{-4}\, b^5$
i)	$\dfrac{(4a)^3\, a^{1-2n}\, b^{3n}}{9\, a^{n-1}} : \dfrac{-4^2\, a^{2n}\, b^{4+7n}}{3\, a\, b^{4n-1}}$	$-\dfrac{4}{3}\, a^{6-5n}\, b^{-5}$
j)	$\dfrac{8^{-2}\, a^{3n+6}\, b^{n-4}}{(2a)^4\, b^{n+3}} : \dfrac{4^{-2}\, a^{2-2n}\, b^{2n+1}}{32\, a^{4n}\, b^{2n-3}}$	$\dfrac{1}{2}\, a^{9n}\, b^{-11}$