

Inhaltsverzeichnis: Band 1

1. Grundlagen	1
1.1 Allgemeines zu Mengen	1
1.2 Zahlenmengen	2
1.2.1 \mathbb{N} : die natürlichen Zahlen	2
1.2.2 \mathbb{Z} : die ganzen Zahlen	2
1.2.3 \mathbb{Q} : die rationalen Zahlen	3
1.2.4 \mathbb{R} : die reellen Zahlen	3
1.2.5 \mathbb{C} : die komplexen Zahlen	3
1.2.6 Zusammenfassung	3
1.3 Zahlenintervalle notieren und visualisieren	4
1.4 Der Betrag einer Zahl	5
1.5 Die Grundoperationen	5
1.6 Rechenhierarchie (1. Teil)	6
Aufgaben	9
2. Das Rechnen mit ganzen Zahlen (Rechnen in \mathbb{Z})	11
2.1 Addition und Subtraktion	11
2.2 Multiplikation	12
2.3 Potenzen	15
2.3.1 Begriffe	15
2.3.2 Potenzieren und die Grundoperationen	15
2.3.3 Spezialfälle	16
2.4 Die binomischen Formeln	17
2.5 Zerlegen von Summen in Faktoren (Ausklammern)	19
2.6 Zerlegen von Summen in binomische Formeln	20
2.7 Zerlegen von Summen in Faktoren von Summen	21
2.8 Division	23
Aufgaben	27
3. Das Rechnen mit Brüchen (Rechnen in \mathbb{Q})	33
3.1 Brüche und Dezimalbrüche	33
3.1.1 Brüche in Dezimalbrüche umwandeln	33
3.1.2 Dezimalbrüche in Brüche umwandeln	34
3.2 Runden, Genauigkeit und signifikante Stellen	35
3.3 Vorzeichen bei Brüchen	37
3.4 Erweitern und Kürzen	37
3.4.1 Spezialfall I: Ausklammern von -1	38
3.4.2 Spezialfall II: Erweitern mit -1	39
3.4.3 Spezialfall III: Ausklammern von Faktoren	39
3.4.4 Spezialfall IV: Binomische Formeln	40
3.5 Addition und Subtraktion von Brüchen	41
3.5.1 Brüche gleichnamig machen: das kgV (kleinstes gemeinsames Vielfaches)	42
3.6 Multiplikation von Brüchen	44
3.7 Division von Brüchen	46
3.8 Doppelbrüche	48
Aufgaben	55

4.	Lineare Gleichungen mit einer Variablen	65
4.1	Einleitung.....	65
4.2	Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen.....	66
4.3	Lineare Gleichungen mit Parametern.....	70
	Aufgaben.....	75
5.	Gleichungssysteme mit zwei Variablen	79
5.1	Gleichungen mit zwei Variablen.....	79
5.2	Gleichungssysteme mit zwei Variablen.....	80
5.3	Lösen von Gleichungssystemen.....	81
5.4	Einsetzungsverfahren.....	82
5.5	Gleichsetzungsverfahren.....	84
5.6	Additionsverfahren.....	86
5.7	Gleichungssysteme mit Variablen im Nenner.....	89
5.8	Substitutionsverfahren.....	95
5.9	Gleichungssysteme mit Parametern.....	100
	Aufgaben.....	105
6.	Quadratische Gleichungen	113
6.1	Vorbemerkungen.....	113
6.2	Normalformen der quadratischen Gleichungen.....	113
6.3	Lösen von rein-quadratischen Gleichungen.....	114
6.4	Lösen von gemischt-quadratischen Gleichungen.....	116
	6.4.1 Faktorzerlegung.....	116
	6.4.2 Quadratische Ergänzung.....	118
	6.4.3 pq-Formel.....	121
	6.4.4 Mathematische Herleitung der pq-Formel.....	124
	6.4.5 abc-Formel.....	125
	6.4.6 Mathematische Herleitung der abc-Formel.....	129
	6.4.7 Lösungsdiskussion.....	130
6.5	Sätze von Vieta.....	131
6.6	Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.....	132
6.7	Quadratische Gleichungen mit Parametern.....	135
	Aufgaben.....	139
7.	Gleichungen: Textaufgaben	143
7.1	Lösen von Textaufgaben.....	143
7.2	Zahlenaufgaben.....	143
7.3	Altersaufgaben.....	149
7.4	Kapital und Zins.....	152
7.5	Verteilungsaufgaben.....	157
7.6	Mischungsaufgaben.....	160
7.7	Arbeit / Leistung.....	164
7.8	Bewegung.....	168
7.9	Geometrie.....	171
7.10	Diverses.....	174
	Aufgaben.....	179

8.	Potenzen	197
8.1	Einführung in Potenzen / Wurzeln / Logarithmen	197
8.2	Begriffe	197
8.3	Erläuterungen zu den Operationen.....	198
8.4	Klammern und Vorzeichen bei Potenzen	198
8.5	Rechenregeln für Potenzen mit gleicher Basis.....	199
	8.5.1 Addition / Subtraktion.....	199
	8.5.2 Multiplikation	199
	8.5.3 Division	199
	8.5.4 Potenzieren.....	200
	8.5.5 Wurzelziehen	200
8.6	Rechenregeln für Potenzen mit unterschiedlicher Basis	201
	8.6.1 Addition / Subtraktion.....	201
	8.6.2 Multiplikation	201
	8.6.3 Division	201
8.7	Rechenhierarchie (2. Teil) und Rechenverwandtschaften	202
	8.7.1 Rechenverwandtschaften	202
	8.7.2 Rechenhierarchie.....	202
	8.7.3 Grundrechenregeln für Exponenten bei Potenzen mit gleicher Basis.....	202
8.8	Spezialfälle	203
8.9	Rechenbeispiele	204
8.10	Zusammenfassung	205
8.11	Potenzgleichungen	206
	8.11.1 Potenzgleichungen mit ganzzahligen Exponenten	206
	8.11.2 Potenzgleichungen mit Bruch-Exponenten.....	207
8.12	Die Zehnerpotenz	208
	Aufgaben	211
9.	Wurzeln	219
9.1	Die Quadratwurzel	219
9.2	Die allgemeine Wurzel	220
9.3	Wurzelberechnungen mit dem Taschenrechner.....	221
9.4	Rechnen mit Wurzeln	222
	9.4.1 Addition / Subtraktion.....	222
	9.4.2 Wurzeln kürzen und erweitern	222
	9.4.3 Wurzeln vereinfachen	223
	9.4.4 Multiplikation / Division / Potenzieren / Wurzelziehen bei gleicher Basis	224
	9.4.5 Multiplikation / Division bei gleichem Wurzelexponent mit unterschiedlicher Basis	225
	9.4.6 Nenner wurzelfrei machen.....	226
9.5	Wurzelgleichungen	227
	Aufgaben	235
10.	Logarithmen	241
10.1	Grundregel des Logarithmierens	241
10.2	Der 10er Logarithmus lg	243
10.3	Rechenregeln bei Logarithmen.....	244
10.4	Exponentialgleichungen.....	246
10.5	Logarithmusgleichungen.....	252
	10.5.1 Logarithmusgleichungen mit der Variablen im Numerus	253
	10.5.2 Logarithmusgleichungen mit der Variablen in der Basis	254
	Aufgaben	257
	Stichwortverzeichnis	265

b) (1) $3x + 5y = 21$
 (2) $5x + 4y = 22$

Variante 1: x soll zuerst wegfallen

- ➊ **Definitionsmenge**
 $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
- ➋ **Gleichung(en) umformen**
 Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**
 hier: Gleichung (1) mit 5
 Gleichung (2) mit (-3)

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x + 5y = 21 & | \cdot 5 \\ (1)' & 15x + 25y = 105 & \\ (2) & 5x + 4y = 22 & | \cdot (-3) \\ (2)' & -15x - 12y = -66 & \end{array}$$
- ➌ **Eliminieren einer der Variablen**
 Die beiden Gleichungen **addieren**:

$$\begin{array}{r} (1)' \quad 15x + 25y = 105 \\ (2)' \quad -15x - 12y = -66 \\ \hline \quad \quad 25y - 12y = 105 - 66 \end{array}$$
- ➍ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$$\begin{array}{rcl} 13y = 39 & & | : 13 \\ \underline{y = 3} & & \end{array}$$
- ➎ **2. Variable ausrechnen**
 Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
 hier: y in Gleichung (1)

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5y = 21 & \text{und } y = 3 & \\ 3x + 5 \cdot 3 = 21 & & \\ 3x + 15 = 21 & & | - 15 \\ 3x = 6 & & | : 3 \\ \underline{x = 2} & & \end{array}$$
- ➏ **Lösungsmenge**
 $L = \{(2 | 3)\}$

Variante 2: y soll zuerst wegfallen

- ➊ **Definitionsmenge**
 $D = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$
- ➋ **Gleichung(en) umformen**
 Gleichung(en) **geeignet multiplizieren**
 hier: Gleichung (1) mit 4
 Gleichung (2) mit (-5)

$$\begin{array}{rcl} (1) & 3x + 5y = 21 & | \cdot 4 \\ (1)' & 12x + 20y = 84 & \\ (2) & 5x + 4y = 22 & | \cdot (-5) \\ (2)' & -25x - 20y = -110 & \end{array}$$
- ➌ **Eliminieren einer der Variablen**
 Die beiden Gleichungen **addieren**:

$$\begin{array}{r} (1)' \quad 12x + 20y = 84 \\ (2)' \quad -25x - 20y = -110 \\ \hline \quad \quad 12x - 25x = 84 - 110 \end{array}$$
- ➍ **Verbleibende 1. Variable ausrechnen**

$$\begin{array}{rcl} -13x = -26 & & | : (-13) \\ \underline{x = 2} & & \end{array}$$
- ➎ **2. Variable ausrechnen**
 Den Wert der berechneten Variable in einer der beiden Ausgangsgleichungen einsetzen.
 hier: x in Gleichung (1)

$$\begin{array}{rcl} 3x + 5y = 21 & \text{und } x = 2 & \\ 3 \cdot 2 + 5y = 21 & & \\ 6 + 5y = 21 & & | - 6 \\ 5y = 15 & & | : 5 \\ \underline{y = 3} & & \end{array}$$
- ➏ **Lösungsmenge**
 $L = \{(2 | 3)\}$

c) (1) $4x + 3y = 7$
(2) $7x + 6y = 10$

D =

A large grid area for solving the system of equations in part c.

L =

d) (1) $5x - 8y = -6$
(2) $2x + 6y = -7$

D =

A large grid area for solving the system of equations in part d.

L =

6.4.3 pq-Formel

Neben den beiden mathematischen Methoden der Faktorzerlegung und der quadratischen Ergänzung gibt es auch Lösungsmethoden, die auf Formeln basieren: die pq- und die abc-Formel der quadratischen Gleichungen.

Haben wir eine quadratische Gleichung, bei der vor dem x^2 der Faktor 1 steht, lässt sich die pq-Formel anwenden.

$$\text{Normalform: } x^2 + px + q = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die mathematische Herleitung der pq-Formel können Sie im Kapitel 6.4.4 nachvollziehen.

Allgemeines Lösungsvorgehen:

- 1 Definitionsmenge bestimmen
- 2 Gleichung in die pq-Normalform bringen (wenn nötig), und die Werte für p und q bestimmen
! Achtung: Die Vorzeichen von p und q auch übernehmen.
- 3 Werte für p und q in der Formel einsetzen (*inkl. Vorzeichen!*)
- 4 Variablen x_1 und x_2 ausrechnen
- 5 Lösungsmenge bestimmen

Beispiele ($G = \mathbb{R}$)

$$\text{a) } x^2 + 4x - 221 = 0$$

- 1 $D = \mathbb{R}$
- 2 Wir bestimmen zuerst p und q.
(falls der Faktor vor $x^2 \neq 1$ ist, muss die Gleichung noch durch diesen dividiert werden)

$$x^2 \quad \underbrace{+ 4x}_{p} \quad \underbrace{- 221}_{q} = 0$$

Die **Vorzeichen** gehören zu p und q dazu !

- 3 Die Werte für p und q in der Formel einsetzen: $p = 4$, $q = -221$

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-221)}$$

- 4 Variablen x_1 und x_2 ausrechnen:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 221}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{225}$$

$$x_{1,2} = -2 \pm 15$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 - 15 \quad \Rightarrow x_1 = \underline{-17}$$

$$\Rightarrow x_2 = -2 + 15 \quad \Rightarrow x_2 = \underline{13}$$

- 5 $L = \{ -17; 13 \}$



Aufgabe 8.12

Bezeichnen Sie alle richtigen Umformungen.

a) $\frac{4}{a^4}$ $4a^{-4}$ $\left(\frac{a^2}{2}\right)^{-2}$ $(4a^4)^{-1}$ $\frac{a^{-4}}{4}$ $(-2a^{-2})^2$

b) $(-4a^{-2})^2$ $16a^{-4}$ $\frac{16}{a^4}$ $4a^{-4}$ $(4a)^{-4}$ $\left(\frac{1}{2}a\right)^{-4}$

c) $\left(\frac{a^2}{(-a)^3}\right)^{-2}$ $(-a)^2$ $(-a)^{-2}$ $-a^2$ $\left(\frac{1}{a}\right)^{-2}$ a^2

d) $-a^5$ $(-a)^5$ $\left(-\frac{1}{a}\right)^{-5}$ $-\left(\frac{1}{a}\right)^{-5}$ $(-a)^3 \cdot a^2$ $-a^6 \cdot \left(\frac{1}{a}\right)$

e) $\frac{a^3}{3}$ $\frac{3}{a^{-3}}$ $\left(\frac{3}{a^3}\right)^{-1}$ $\frac{1}{3a^{-3}}$ $\left(\frac{-3}{a^3}\right)^{-1}$ $\left(\frac{-3}{(-a)^3}\right)^{-1}$

f) $\left(\frac{-a}{2}\right)^4$ $\frac{-a^4}{16}$ $2^{-4} a^4$ $\left(\frac{a^2}{4}\right)^2$ $\left(\frac{-a^2}{4}\right)^2$ $(16a^{-4})^{-1}$



Aufgabe 8.13

Bestimmen Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen in der Grundmenge \mathbb{R} [für die Aufgaben a) bis o)] bzw. \mathbb{R}^+ [ab Aufgabe p)].
(wenn nötig auf 4 signifikante Dezimalstellen runden)

a) $x^4 = 150.0625$

b) $x^3 = 3.375$

c) $x^5 = 7'776$

d) $x^{-6} = 729$

e) $x^{-7} = 13$

f) $x^{-4} = 16$

g) $2x^3 - 250 = 0$

h) $4x^4 - 20.25 = 0$

i) $3x^{-4} - 0.1875 = 0$

j) $(x+3)^3 = 216$

k) $(x+2)^5 = 33$

l) $(x-1)^{-4} = 81$

m) $2(x-7)^4 = 512$

n) $0.2(x+1)^5 = 625$

o) $256(x+3)^{-8} = 65'536$

p) $x^{\frac{5}{6}} = 3$

q) $x^{-\frac{3}{5}} = 0.2$

r) $x^{1.5} = 27$

s) $x^{\frac{4}{3}} = 16$

t) $x^{-\frac{5}{2}} = 0.6$

u) $x^{-\frac{2}{7}} = 0.25$



Aufgabe 9.4

Berechnen Sie die Resultate der folgenden Additionen und Subtraktionen, und vereinfachen Sie so weit als möglich.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ | b) $\sqrt{a} - \sqrt{a}$ | c) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$ |
| d) $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a}$ | e) $2\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a}$ | f) $4\sqrt[3]{2a} - 3\sqrt[3]{2a}$ |
| g) $6\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a}$ | h) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[5]{a}$ | i) $\sqrt[4]{a} + \sqrt[8]{a^2}$ |
| j) $\sqrt{a^4} + \sqrt[3]{a^6}$ | k) $\sqrt{2a^4} + \sqrt[3]{4a^6}$ | l) $\sqrt{(3a)^4} + \sqrt[3]{(5a)^6}$ |
| m) $\sqrt[3]{a^5} + 2\sqrt[9]{a^{15}}$ | n) $2\sqrt{a} + 5\sqrt{a} - 4\sqrt{a}$ | o) $9\sqrt[4]{a} + 2\sqrt[4]{a} - 3\sqrt[4]{a}$ |
| p) $4\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{a} + 8\sqrt{a}$ | q) $10\sqrt[5]{ab} - (4\sqrt[5]{ab} + 3\sqrt[5]{ab})$ | r) $9\sqrt{a} + (2\sqrt{a} - 7\sqrt{a})$ |



Aufgabe 9.5

Vereinfachen Sie folgende Wurzeln, und schreiben Sie die Lösung als Potenz.

- | | | | | |
|------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|----------------------------|
| a) $\sqrt{a^2}$ | b) $\sqrt{a^4}$ | c) $\sqrt[3]{a^9}$ | d) $\sqrt[6]{a^2}$ | e) $\sqrt[4]{a^2}$ |
| f) $\sqrt[9]{\frac{1}{a^3}}$ | g) $-\sqrt[5]{\frac{2}{a^{15}}}$ | h) $-\sqrt[3]{\frac{27}{a^{18}}}$ | i) $\sqrt{\sqrt{5}}$ | j) $\sqrt{\sqrt{25a}}$ |
| k) $\sqrt{\sqrt{81a}}$ | l) $\sqrt{\sqrt{625a^2}}$ | m) $\sqrt[3]{\sqrt{a^4}}$ | n) $\sqrt[4]{\sqrt{a^6}}$ | o) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a}}$ |
| p) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^4}}$ | q) $\sqrt[4]{\sqrt{ab^6}}$ | r) $\sqrt[3]{64\sqrt{a^9}}$ | s) $\sqrt{81\sqrt[6]{a^2}}$ | t) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}}$ |



Aufgabe 9.6

Berechnen und vereinfachen Sie so weit als möglich. Schreiben Sie die Lösung als Potenz.

- | | | | |
|----------------------------|------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|
| a) $\sqrt{\sqrt{a}}$ | b) $\sqrt[3]{\sqrt{a^6}}$ | c) $\sqrt{a\sqrt{a}}$ | d) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ |
| e) $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$ | f) $\sqrt[4]{a^8\sqrt{a^6}}$ | g) $\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{a^2}}$ | h) $\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}$ |
| i) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}$ | j) $\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}$ | k) $\sqrt{2a\sqrt{a^3}}$ | l) $\sqrt{2\sqrt{2a}}$ |
| m) $\sqrt{3\sqrt{3a}}$ | n) $\sqrt{a\sqrt{2a}}$ | o) $\sqrt{a^5\sqrt{2a}}$ | p) $\sqrt{2a^3\sqrt{2a}}$ |
| q) $\sqrt[3]{2a\sqrt{2a}}$ | r) $\sqrt[3]{2a^2\sqrt{a}}$ | s) $\sqrt[3]{8a^6\sqrt{a^3}}$ | t) $\sqrt{9a^5\sqrt{9a^3}}$ |